"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

FUNCIONES QUE PRESERVAN LA CONVERGENCIA DE SERIES

ELVA LIZBETH CLARK FLORES

INTRODUCCIÓN:

Una función $f : X \to X$ se dice que preserva la convergencia de series en X si para cada serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ ($x_n \in X$) la serie $\sum_{n\geq 1} f(x_n)$ también converge.

Para el caso $X = \mathbb{R}$ se le llama "f transformada" y todas estas funciones se denotan po $F^{(cp)}$ (ver [3]).

FUNCIONES REALES

En el trabajo [1] R. RADO mostró que si una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conserva la convergencia de series $\sum_{n\geq 1} x_n$ ($x_n \in \mathbb{R}$) entonces existen $k = k(f)$ y $\delta = \delta(f)$ positivos tales que $|x| < \delta$, $f(x) = kx$ (para abreviar, decimos que f es lineal en la vecindad del punto 0).

Pero esto no es necesariamente cierto si no se supone que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$. Para ver esto, definiremos el sistema $\mathfrak{M}_\infty$:

SISTEMA $\mathfrak{M}_c$ Y $\mathfrak{M}_\infty$

Sea $c \geq 0$. $\mathfrak{M}_c$ denota el sistema de todas las funciones $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ para el cual se cumple la siguiente condición: Si $\sum_{n\geq 1} t_n \leq 1$, para $t_n \in [0,1]$ entonces $\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)$ es convergente y

$$\left|\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)\right| \leq c.$$

Además, el sistema $\mathfrak{M}_\infty$ esta definido como $\mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{c\geq 0} \mathfrak{M}_c$.

OBSERVACIÓN

El conjunto $\mathfrak{M}_\infty$ representa un sistema de funciones que conserva, de manera uniforme, la convergencia de series $\sum_{n\geq 1} t_n \leq 1$, donde $t_n \in [0,1]$.

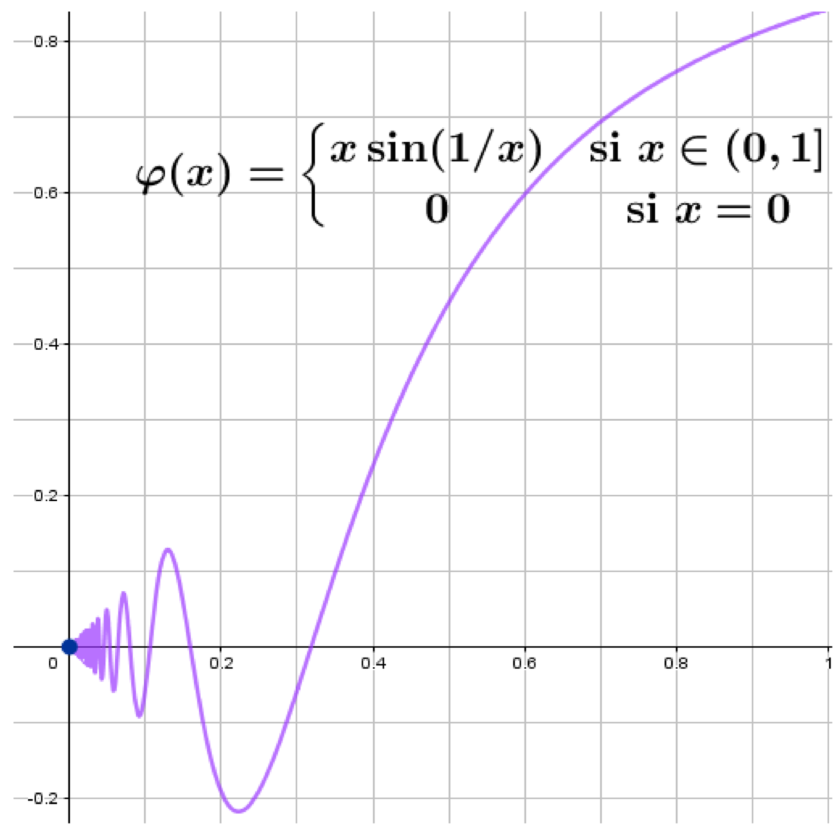
LA FUNCIÓN QUE NO ES LINEAL EN LA VECIDNAD DEL 0

Consideremos $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ entonces φ puede no ser lineal en una vecindad del punto 0. Por ejemplo, si ponemos

$$\varphi(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x\in (0,1] \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}, \tag{1}$$

entonces para cada $\sum_{n\geq 1} t_n \leq 1$ donde $t_n \in [0,1]$,

$$\left|\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)\right| \leq \sum_{n\geq 1} |\varphi(t_n)| \leq \sum_{n\geq 1} t_n \leq 1,$$



como consecuencia $\varphi \in \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_\infty$ y evidentemente φ es no lineal en cualquier vecindad del punto 0.

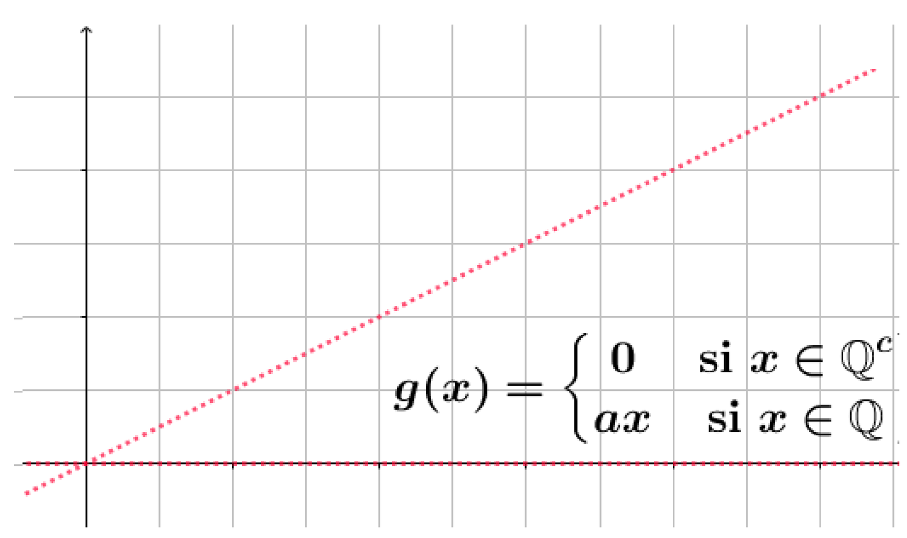
CLASES $F^{(cp)}$ Y $F^{(acp)}$

Del trabajo de Rado, mencionado anteriormente se obtiene que $F^{(cp)} \subset F^{(acp)}$ (ver por ejemplo [3]) donde $F^{(acp)}$ denota la clase de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que si $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge entonces $\sum_{n\geq 1} |f(x_n)| < \infty$.

Pero su contención es estricta, por ejemplo, consideremos $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Se define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x es irracional} \\ ax & \text{si x es racional} \end{cases}$$

entonces $g \in F^{(acp)}$ pero $g \notin F^{(cp)}$.



ESPACIOS NORMADOS

Para el caso de espacios normados, las funciones que preservan la convergencia de series pueden ser descritas de dos maneras:

Sea X un espacio lineal normado sobre $\mathbb{R}$. Una función $f : X \to X$ preserva la convergencia de series en X si y solo si existe una función aditiva y homogenea $l : X \to X$ y una vecindad U del $0 \in X$ tal que $f|_U = l|_U$. (ver por ejemplo [4]).

Un ejemplo de tal función puede ser la función $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ donde $\mathcal{M}$ es el espacio lineal normado de todas las sucesiones acotadas de números reales con la norma del supremo y h se define de la siguiente manera: para $x = \{x_k\}_{k\geq 1}$, se tiene

$$h(x) = (x_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathcal{M}.$$

REFERENCIAS

[1] R. Rado *A theorem on infinite series*, J. London Math. Soc. XXXV (1960), pag. 273—276.

[2] Neubrunn, Tibor *On certain spaces of transformations of infinite series*, Časopis pro pěstování matematiky , vol. 92 (1967), pag. 267-282

[3] Ján Bors´k *Remarks on functions preserving convergence of infinite series*, Real Analysis Exchange, vol. 21(2), (1995-96), pag. 725-731

[4] Martin Dindos *Remarks on infinite series in linear normed spaces*, Tatra Mt. Math. Publ. 19(2000) , pag 31-46